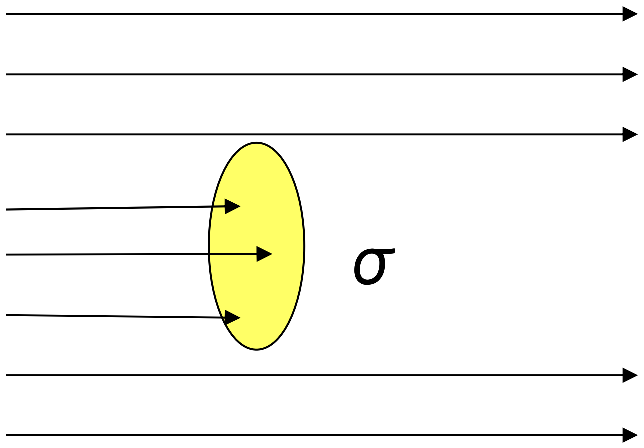
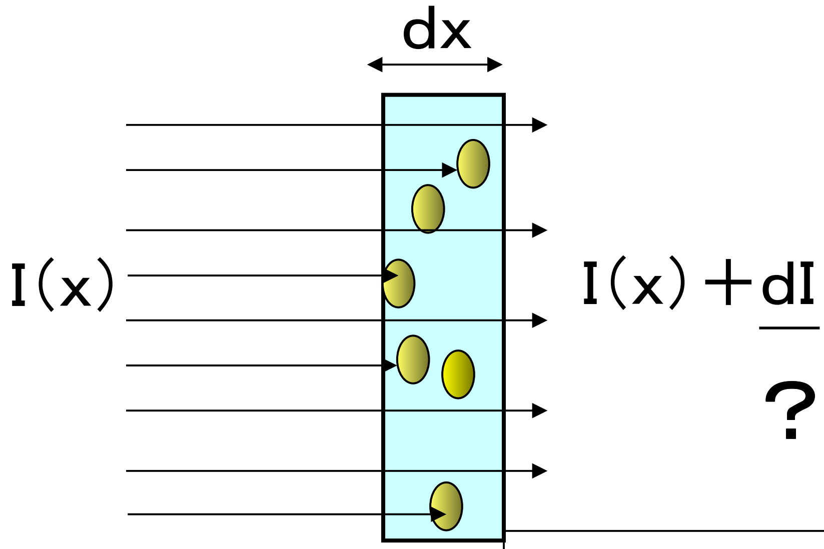
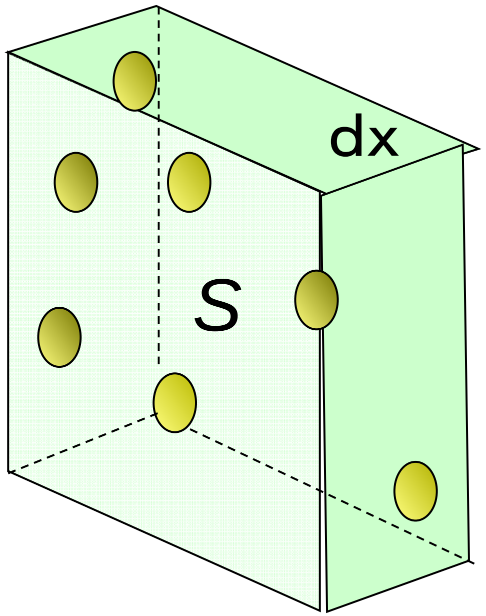
J. 1.　光学的深さ(Optical Depth)　τ

σ :粒子断面積　　n:粒子数密度

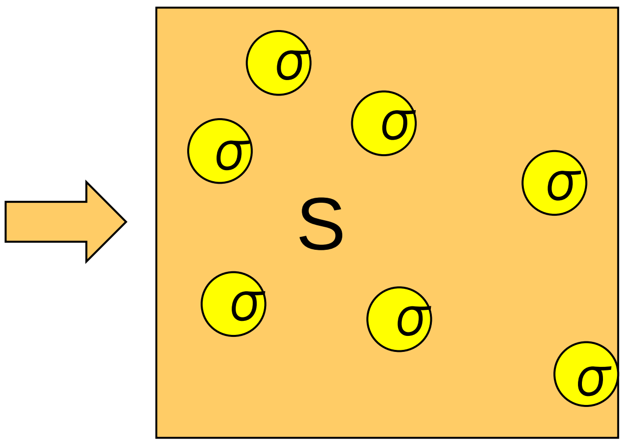




$$dI = -I \cdot \sigma \cdot n \cdot dx$$
$$= -I \cdot d\tau$$



正面(面積S)から見ると



総断面積　Σ

$$\Sigma = \sigma \cdot dN$$
$$= \sigma \cdot n \cdot S \cdot dx$$

被覆率　C

$$C = \Sigma / S = \sigma \cdot n \cdot dx$$

光学的深さ(optical　depth)　τ

前頁でdxを十分に小さく取り、$\Sigma / S = d\tau \ll 1$の場合(左図)を考えます。この場合粒子同士の重なりが無視できるので被覆率 $C = d\tau$ が成立します。

しかし$d\tau$が大きくなると、粒子が重なって見えるケースが現れてきます。

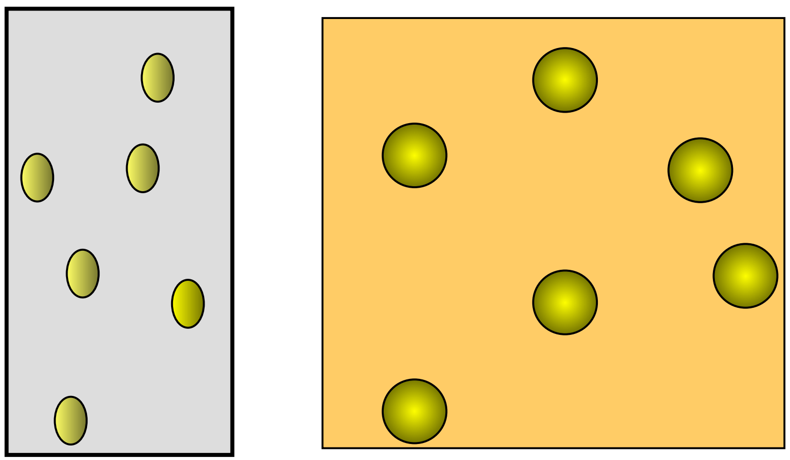
例えば、粒子断面積の総計　$\Sigma = S$　の場合を考えてみましょう。つまり、
$d\tau = \Sigma / S = n\sigma dx = 1$の場合(右図)です。

この時の正面図には多数の重なり合いが見られます。そのために被覆率Cの有効率が低下し、$C < d\tau$となります。

では、粒子の重なり合いを考慮した時Cはいくつになるのでしょう？

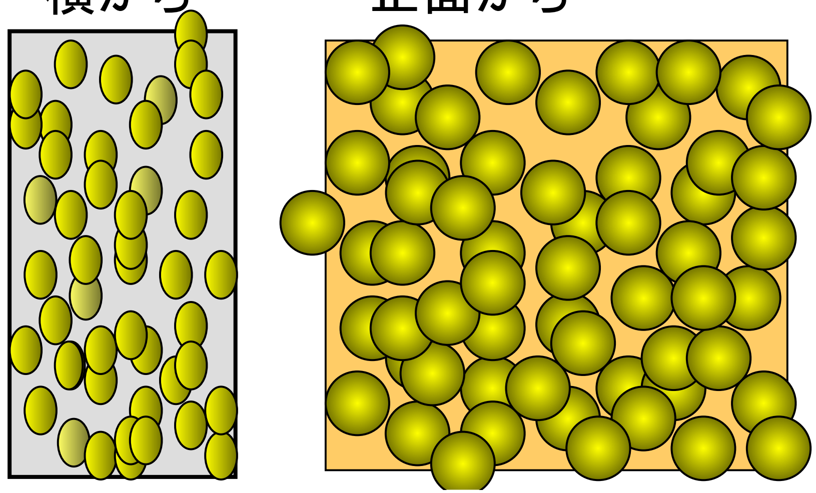
$\tau \ll 1$

横から　　正面から

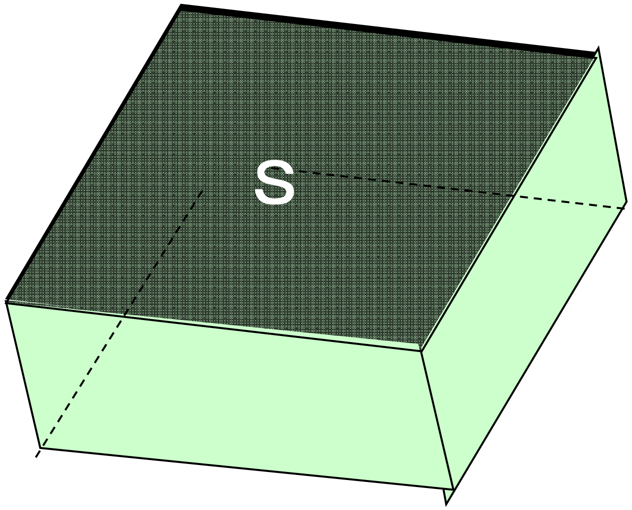


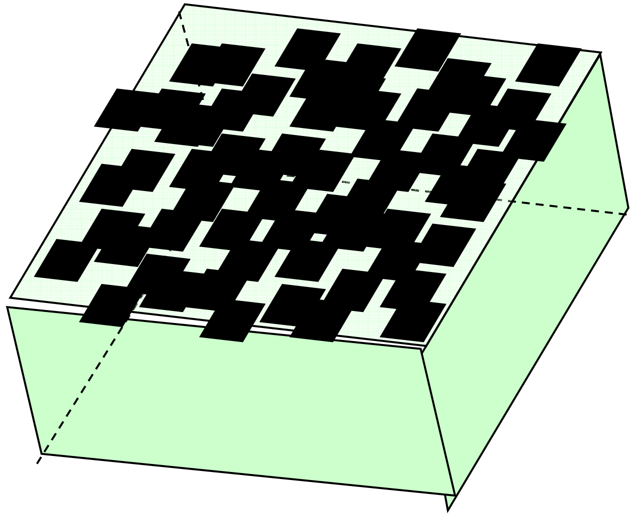
$\tau = 1$

横から　　正面から



左図のように面積Sの不透明な紙を板の上に置きます。この場合被覆率は1です。
次に紙をN個の紙片に切って、板の上に散らします（右図）



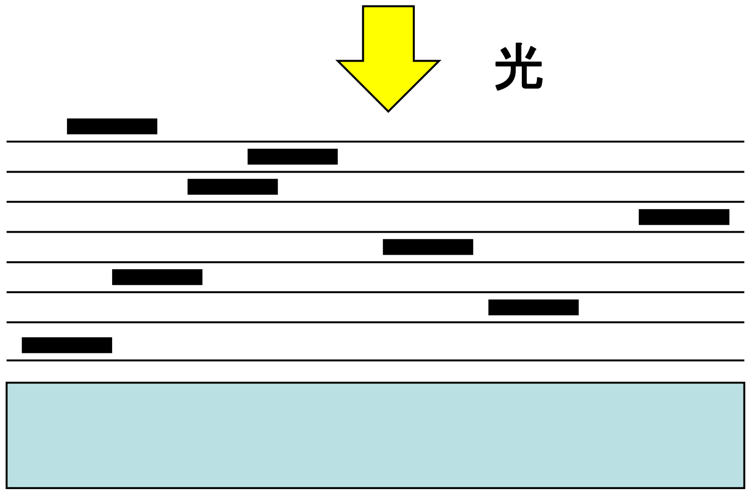


千切った紙片の大きさを小さくして行った時にCはいくつになるでしょう？

実験から大体の値を推測して下さい。

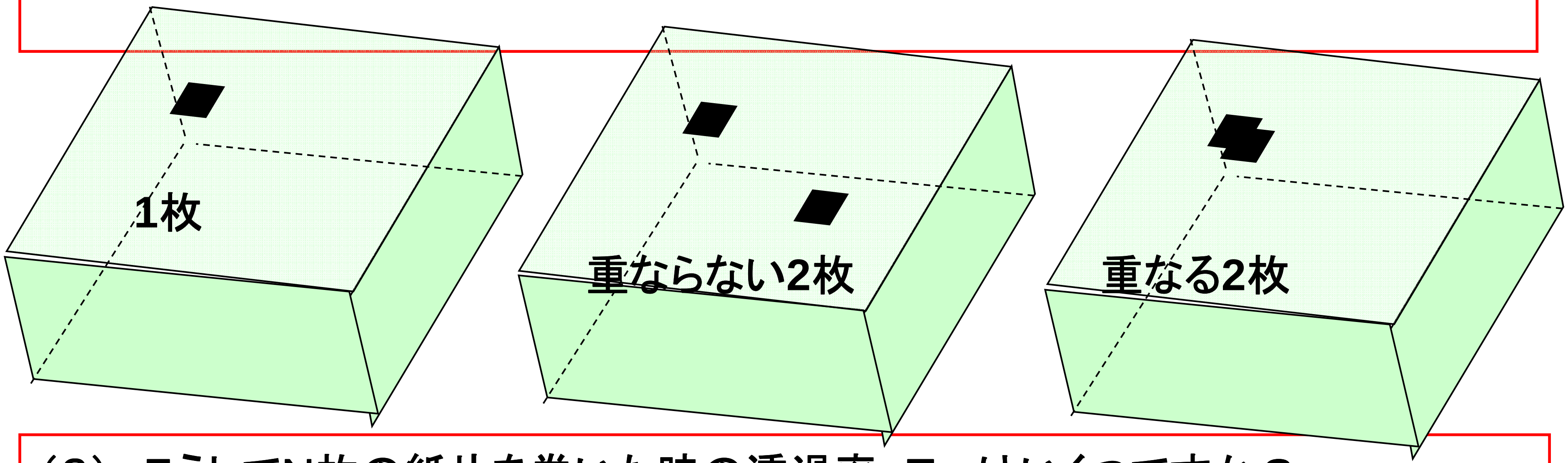
右図のようにN個の紙片を仮想的にN層に分けて考えましょう。

光が上から来てまず第1層を通過します。



（1） 紙片1個の面積は$\sigma = S/N$ です。第1層の被覆率C_1はいくつですか？透過率T_1は？

（2） 次に第2層を通過します。この時、第1、第2層を合わせた被覆率C_2は2枚の紙片が重なるかどうかで違いますが、平均のC_2、T_2は幾つでしょう？



（3） こうしてN枚の紙片を巻いた時の透過率 T_N はいくつですか？

（4） Nを無限に大きくしていった時の C_N、T_N は幾つでしょう？

（5） 始めに用意する紙がK枚の時に、Nを無限に大きくしていった時の C_N、T_N は幾つになるでしょう？

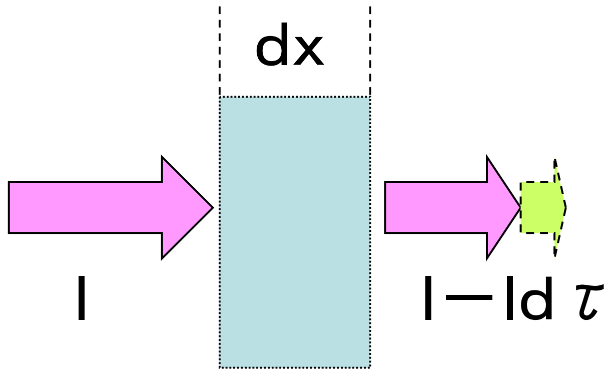
光学的深さ τ と被覆率 C

こうして、光学的深さτと透過率T、被覆率Cの関係は、

T=exp(－τ)、　　C=1－T＝1－exp(－τ) とわかります。

τ＜＜1のときは、C=1－(1－τ)＝τで最初の結果が確認されます。

微分方程式による考え方



授業の最初に出てきた図に戻ると、

dI=-Idτだから、

$$\frac{dI}{d\tau} = -I, \qquad I(\tau) = I(\tau = 0)\,e^{-\tau}$$

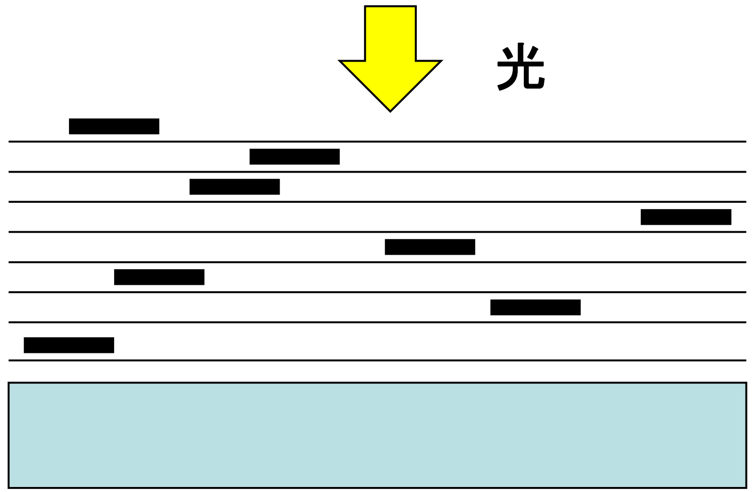
右上の解に出てくる e$^{-\tau}$が最初の導出にあったTにあたります。

ここまでは途中の粒子は何の光も放出せず、もっぱら光を吸収するだけと仮定していました。

次に、粒子が吸収と同時に自身で光を放出する場合を扱います。

右図のようにN個の紙片を仮想的にN層に分けて考えましょう。

光が上から来てまず第1層を通過します。



（1）　紙片1個の面積は$\sigma = S/N$　です。第1層の被覆率C_1はいくつですか？透過率T_1は？

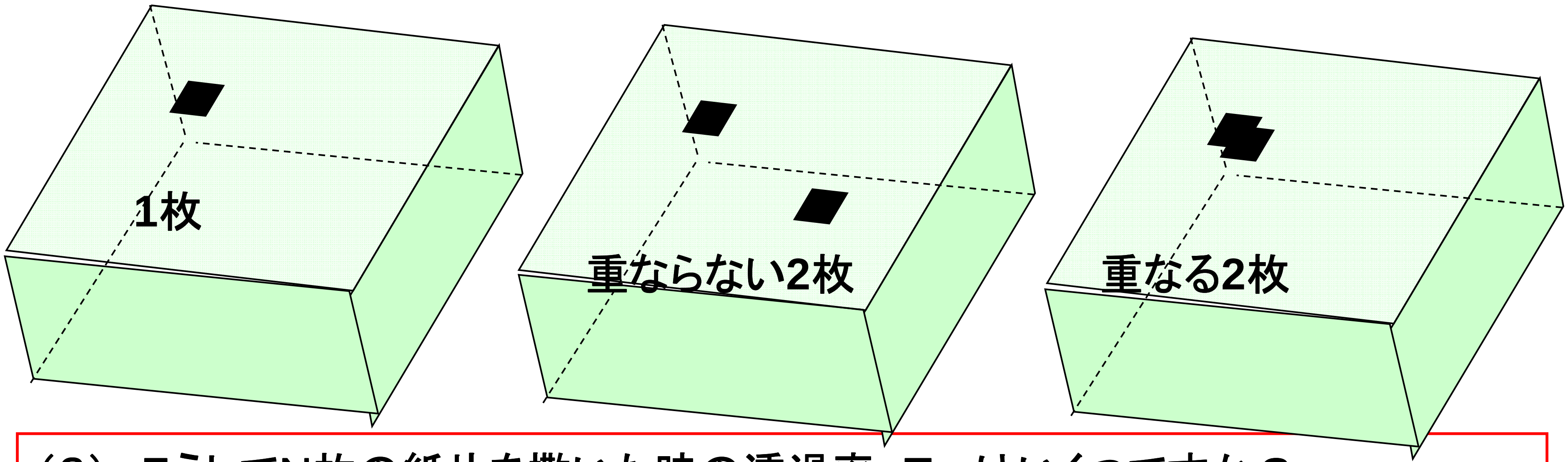
$C_1 = \sigma / S = 1/N$

$T_1 = 1 - C_1 = 1 - (1/N)$

（2） 次に第2層を通過します。この時、第1、第2層を合わせた被覆率C_2は2枚の紙片が重なるかどうかで違いますが、平均のC_2、T_2は幾つでしょう？

$C_2 = C_1 + T_1 \cdot C_1 = (1/N) + [1-(1/N)](1/N) = 1 - [1-(1/N)]^2$

または、 $T_2 = T_1 \cdot T_1 = [1-(1/N)]^2$ $C_2 = 1 - [1-(1/N)]^2$



（3） こうしてN枚の紙片を撒いた時の透過率 T_N はいくつですか？

$T_N = [1-(1/N)]^N$

（4） Nを無限に大きくしていった時の C_N、T_N は幾つでしょう？

$T_N = \lim\ [1-(1/N)]^N = 1/e$

$C_N = 1 - 1/e$

（5） 始めに用意する紙がK枚の時に、Nを無限に大きくしていった時の C_N、T_N は幾つになるでしょう？

紙片1個の面積は $\sigma = K \cdot S/N$ なので、

$C_1 = \sigma/S = K/N$、 $T_1 = 1 - C_1 = 1 - (K/N)$

$T_N = \lim\ [1-(K/N)]^N = (1/e)^K = e^{-K}$