

§ 4. 放射輸送の基礎

Erika Bohm-Vitense 著 “Introduction to Stellar Astrophysics”(1989) Cambridge University Press より

§ 4.1 強度 I_λ の定義

ここで、強度 I_λ が意味するものを正確に定義する。 $d\sigma$ の表面積を持つ面積要素があり、光がそこを垂直に立体角 $d\omega$ で開いた狭い円錐の中を通り抜けていく場合を考える (図 4.1 を参照)。面積 $d\sigma$ を通り抜けていく毎秒 E_λ というエネルギー量は、 $d\sigma$ に比例し、 $d\omega$ に比例する。この面積要素を毎秒通り抜けていく E_λ というエネルギー量は、次式で与えられる。

$$E_\lambda = I_\lambda d\omega d\sigma d\lambda \quad \text{or} \quad I_\lambda = \frac{E_\lambda}{d\omega d\sigma d\lambda} \quad 4.1$$

すなわち、面積要素の面積及び波長バンド幅、円錐の開き具合を示す立体角に比例する。式(4.1)の定義によれば、強度 I_λ は 1 秒あたりに 1cm^2 の面積あたり $\Delta\omega=1$ の立体角に波長バンド幅 $\Delta\lambda=1$ あたり通るエネルギーである。明らかに立体角 $\Delta\omega=1$ というのは大きく開いているので、全部のものが $d\sigma$ の面を垂直には通り抜けられない。むしろ、無限に小さい円錐の開きの極限を持った円錐の立体角で割ったような狭い円錐を通るエネルギーについて考えるべきである。

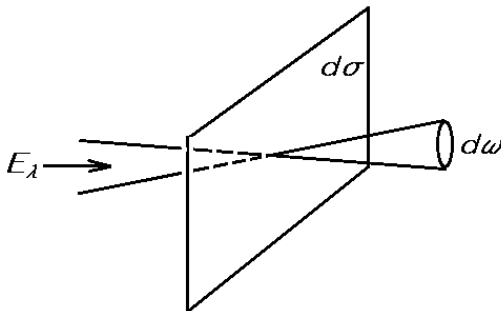


図 4.1 波長バンド幅 $\Delta\lambda$ に E_λ という量のエネルギーがある面積要素 $d\sigma$ を通り抜け、立体角 $d\omega$ で開いた円錐に出ていく。

次に、この表面の法線に対して角度 θ だけ傾いた面積要素 $d\sigma$ を通るエネルギーについて考える (図 4.2 参照)。有効な光線のビームは $\cos\theta$ の係数だけ減ることになり、次式で表される。

$$E_\lambda = I_\lambda d\sigma \cos\theta d\omega d\lambda \quad 4.2$$

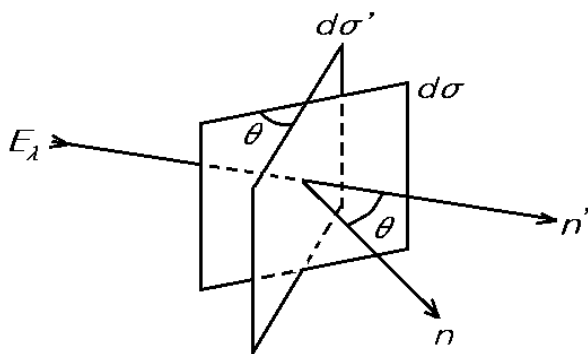


図 4.2 面積要素 $d\sigma$ をその法線方向 n から角 θ だけ傾いて通るエネルギーの量 E_λ は、係数 $\cos\theta$ だけ減る。 $d\sigma$ を通るエネルギーの量 E_λ は、面積要素 $d\sigma'$ を通る量と同じである。ここで $d\sigma'$ は、光線に垂直な面に $d\sigma$ を投影したものである。すなわち、 $d\sigma' = d\sigma \cos\theta$ である。

§ 4.2 吸収と放出を伴ったガス塊と通る放射エネルギーの輸送

今から放射輸送の方程式を導出する。その式は、ガスの塊の中を通過した放射ビームに何が起るかを示述するものである (図 4.3 参照)。エネルギー $E_{\lambda 0}$ が長方形の断面を持つ箱に入射する。光線が経路 ds に沿って通過するとき、吸収が起こりエネルギー E_λ が次式で表される量だけ減少する。

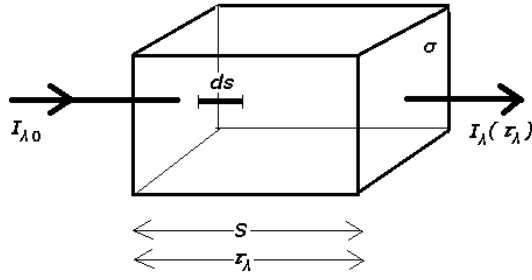


図 4.3 断面積が σ で、光学的厚み $\tau_\lambda = \int_0^S \kappa_\lambda ds$ に対応する長さ S を持つ箱を通過する光のビームを考える。箱の左側に I_λ の光が入射し、箱の中の光路 S を通過する間に吸収と放出により変化し、箱の右側から I_λ で出射する。その光は箱の中の光学的厚み τ_λ と放出 emission の過程に依存する。

$$dE_\lambda = -\kappa_\lambda E_\lambda ds = -\kappa_\lambda ds I_\lambda d\omega d\lambda d\sigma \quad 4.3$$

それと同時に、体積 $dV = d\sigma ds$ から次式で表される量の放出も付け加わる。

$$dE_\lambda = \varepsilon_\lambda d\omega d\lambda ds d\sigma \quad 4.4$$

ここで、 ε_λ は、波長バンド幅 $\Delta\lambda=1$ あたり立体角 $\Delta\omega=1$ 中に放出される単位体積あたり 1 秒あたりのエネルギー放出量である。吸収と放出をまとめると次式のようなになる。

$$dE_\lambda = dI_\lambda d\sigma d\lambda d\omega = -\kappa_\lambda I_\lambda d\omega d\lambda d\sigma ds + \varepsilon_\lambda d\omega d\lambda ds d\sigma \quad 4.5$$

両辺を $d\omega d\lambda d\sigma ds$ で割り、 $ds \rightarrow 0$ の極限を取ると

$$\frac{dI_\lambda}{ds} = -\kappa_\lambda I_\lambda + \varepsilon_\lambda \quad 4.6$$

この式は次の関係を示す。

$$\frac{dI_\lambda}{ds} > 0 \quad \text{if } \varepsilon_\lambda > \kappa_\lambda I_\lambda \quad \text{and} \quad \frac{dI_\lambda}{ds} < 0 \quad \text{if } \varepsilon_\lambda < \kappa_\lambda I_\lambda \quad 4.7$$

式 (4.6) を κ_λ で割れば、次式を得る。

$$\frac{dI_\lambda}{\kappa_\lambda ds} = \frac{dI_\lambda}{d\tau_{\lambda s}} = -I_\lambda + \frac{\varepsilon_\lambda}{\kappa_\lambda} = -I_\lambda + S_\lambda \quad 4.8$$

ここで、我々は新しい次のシンボルを導入する。

$$S_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{\kappa_\lambda} \quad \text{or} \quad \varepsilon_\lambda = \kappa_\lambda S_\lambda \quad 4.9$$

式 (4.8) が、平行平面大気における放射輸送の方程式である。 S_λ は一般的に源泉関数 (source function) と呼ばれる。式(4.8)から、 I_λ は $S_\lambda < I_\lambda$ のとき経路に沿って減少し、 $S_\lambda > I_\lambda$ のとき増加することがわかる。 $S_\lambda = I_\lambda$ のときは I_λ は変化しない。

§ 4.3 源泉関数 S_λ

ここで黒体中の放射輸送を考えることによって源泉関数 S_λ の物理的な意味を解釈する。始めの定義にしたがって、ここに時間的に変化しない完全な熱力学的平衡にあるガス塊があるとする。そのようなガス塊を通過する光線は何も変化を受けない。そのような環境下では、次のような要請がなされなければならない。

$$\frac{dI_\lambda}{ds} = -\kappa_\lambda I_\lambda + \kappa_\lambda S_\lambda = \kappa_\lambda (S_\lambda - I_\lambda) = 0 \quad 4.10$$

または

$$I_\lambda = S_\lambda \quad 4.11$$

黒体中では I_λ はプランク関数 B_λ に等しいので、黒体中あるいは完全な熱力学的平衡状態では

$$S_\lambda = I_\lambda = B_\lambda \quad 4.12$$

が成り立つことがわかる。すなわち、**完全な熱力学的平衡状態では源泉関数はプランク関数に等しい**、言い換えれば、放出効率

$$\varepsilon_\lambda = \kappa_\lambda B_\lambda \quad 4.13$$

であり、もちろんこれはよく知られたキルヒホッフの法則である。ここで

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad 4.14$$

式 (4.7) は次のように書き換えることができる。

$$\frac{dI_\lambda}{ds} > 0 \quad \text{if } S_\lambda > I_\lambda \quad \text{and} \quad \frac{dI_\lambda}{ds} < 0 \quad \text{if } S_\lambda < I_\lambda \quad 4.15$$

放出が黒体放射と同じであれば、つまり、 $S_\lambda = B_\lambda$ であれば、次のように表すこともできる。

$$\frac{dI_\lambda}{ds} > 0 \quad \text{if } B_\lambda > I_\lambda \quad \text{and} \quad \frac{dI_\lambda}{ds} < 0 \quad \text{if } B_\lambda < I_\lambda \quad 4.16$$

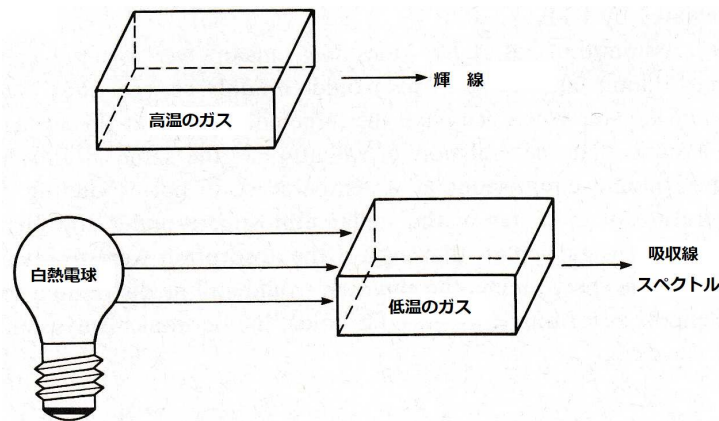
恒星大気の理論において $S_\lambda = B_\lambda$ あるいは $\varepsilon_\lambda = \kappa_\lambda B_\lambda$ であると仮定すれば、これを局所的熱力学的平衡 LTE 仮定と呼ぶ。

この LTE の仮定は、完全な熱力学的平衡状態を仮定することを意味しているのではない。表面で大きなエネルギーが失われている星の外層については、完全に間違いである。我々は、熟慮のもとで、その放射の放出が、星の大気の層の温度に対応した温度 T の熱力学的平衡にあるガス中と同じであるということを仮定しているに過ぎない。これは特に、次のことを意味している。すなわち、もし吸収が 1 本のスペクトル線に取って代わったとしても、放出の方はまだ B_λ に従う全波長に渡って分布しているという意味である。

§ 4.4 吸収線と輝線

図 4.3 の箱の右側から出てくる光のスペクトルが、どんな場合に明るい背景の連続光の上に暗線を示し、どんな場合に背景が低い強度の場合に明るい輝線が表示されるかについてこれから説明する。

言い換えれば、私たちは実験室で輝線スペクトルに慣れているのに、なぜ私たちはほとんどの恒星のスペクトルに吸収線を見ているのか。ほとんどの実験室実験では、私達は通常ガラス容器内の熱いガスを取扱っている、あるいはブンゼンバーナーまたは自由燃焼アークのような開放した熱いガスの場合であるかもしれない。そのような光源は輝線スペクトルを与える。一方、Kirchhoff と Bunsen は、連続スペクトルの熱い光源の前に冷たいガスが入った容器が吸収線スペクトルを与えることを発見した (図 4.4 参照)。ほとんどの星では吸収線が見える。



明らかに、ほとんどの星は 2 番目のケースに相当する。我々は、熱い光源の前に冷たいガスを見る。つまり、星のより深い層は高温で連続スペクトルを放出し、外側の層は低温で吸収線スペクトルを作る。これは約 50 年前に天体物理学者が使った単純化された描像である。その時、彼らは低温の外側の層を「反転層」と呼んだ。これは非常に単純化された描像であることがわかったが、吸収線は明らかに外向きに温度が低下していることを示している。

吸収線または輝線がいつどのように見られるかを定量的に理解しよう。

まず実験室の場合について話す。式 (4.8) $\frac{dI_\lambda}{d\tau_{\lambda s}} = -I_\lambda + S_\lambda$ を基にして説明する。図 4.3 に光

路長 ds にわたる強度の変化を示す。経路 s に沿って $I_\lambda(\tau_\lambda)$ を求めるためにこの方程式を積分したい。この積分を達成するために、 e^{τ_λ} を式の両辺を掛け右辺第 1 項を左辺に移項すると、

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_{\lambda s}} e^{+\tau_\lambda} + I_\lambda e^{+\tau_\lambda} = S_\lambda e^{+\tau_\lambda} \quad 4.17$$

これは、左辺が 2 つの関数の積の微分であるとみなせば次のようにも書ける。

$$\frac{d}{d\tau_\lambda} (I_\lambda e^{\tau_\lambda}) = S_\lambda e^{\tau_\lambda} \quad 4.18$$

これは(4.8)式の形であり、これは経路 τ_λ が 0 から τ_λ の区間に渡って積分することができ

$$\int_0^{\tau_\lambda} \frac{d}{d\tau_\lambda} (I_\lambda e^{\tau_\lambda}) d\tau_\lambda = [I_\lambda e^{\tau_\lambda}]_0^{\tau_\lambda} = \int_0^{\tau_\lambda} S_\lambda e^{\tau_\lambda} d\tau_\lambda = [S_\lambda e^{\tau_\lambda}]_0^{\tau_\lambda} \quad 4.19$$

ここで、 S_λ が経路 s に沿って一定であると仮定した。 $I_\lambda(\tau_\lambda = 0) = I_{\lambda 0}$ であるので、境界

での値を代入すると

$$I_{\lambda}e^{\tau_{\lambda}} - I_{\lambda 0} = S_{\lambda}(e^{\tau_{\lambda}} - 1) \quad 4.20$$

または $e^{\tau_{\lambda}}$ で割って

$$I_{\lambda} = I_{\lambda 0}e^{-\tau_{\lambda}} + S_{\lambda}(1 - e^{-\tau_{\lambda}}) \quad 4.21$$

右側の第1項は、ボックスに入る光が光学的深さ τ_{λ} を通過した後に残った量を表す。第2項は、経路に沿って放出された放射からの光の寄与を与える。

最初に $I_{\lambda 0} = 0$ の場合について議論する。

これは図 4.4 の上の図に相当する。熱いガスだけがあり、光は入射していないが、ガスからは

$$I_{\lambda} = S_{\lambda}(1 - e^{-\tau_{\lambda}}) \quad \text{LTEが成り立つ場合} \quad S_{\lambda} = B_{\lambda}(T) \quad 4.22$$

くらかの放出があるとする。この場合には、式 (4.21) は次のように書ける

次の(a)(b)の2つの限られた場合が重要であることが明らかである

(a) $\tau_{\lambda} \ll 1$ すなわちガスの体積が小さい光学的深さを持つときで、これは光学的に薄い場合と呼ばれる。

それらを指数関数をテイラー級数に展開し、次式を得る。

$$\tau_{\lambda} \ll 1 \text{ の場合} \quad e^{-\tau_{\lambda}} \approx 1 - \tau_{\lambda} \quad 4.23$$

そして

$$I_{\lambda} = S_{\lambda}(1 - 1 + \tau_{\lambda}) = \tau_{\lambda}S_{\lambda} \quad 4.24$$

また、LTE では、すなわちもし $S_{\lambda} = B_{\lambda}$ ならば

$$I_{\lambda} = \tau_{\lambda}B_{\lambda} \quad 4.25$$

ただし、 κ_{λ} が S にそって一定であるならば、 $\tau_{\lambda} = \kappa_{\lambda}S$ である。

反対側からボックスから出ていく光は、 κ_{λ} が大きい場合に強度が大きく、 κ_{λ} が小さな場合は強度が小さい。

図 4.5 に示すように、 κ_{λ} が波長 λ に依存すると仮定する。我々が実際にスペクトル線を見る振動数は、原子内の共鳴振動数であるために吸収係数 κ_{λ} が非常に大きいところでの振動数である。図 4.5 で示した非常に大きな κ_{λ} を示す波長は、スペクトル線の波長に相当する。式(4.25)から、強度は光学的深さが大きいところの波長すなわち、 κ_{λ} が大きいところでの波長で強くなることがわかる。したがって、 $\tau_{\lambda} \ll 1$ の場合、大きな強度を持つ輝線は、大きな κ_{λ} を持つ波長で見られることが期待される。

(b) もう一つの制限された場合は、光学的に非常に厚い場合、すなわち $\tau_{\lambda} \gg 1$ のときで

ある。この場合、 $e^{-\tau_{\lambda}} \rightarrow 0$ であり、式 (4.22) から次のようなことがわかる。すなわち、

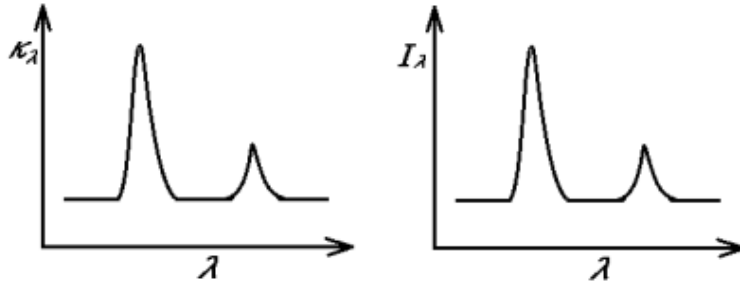


図 4.5 (左) κ_λ が波長依存していることを仮定。
(右) $\tau_\lambda \ll 1$ $I_{\lambda 0} = 0$ の場合の強度分布。

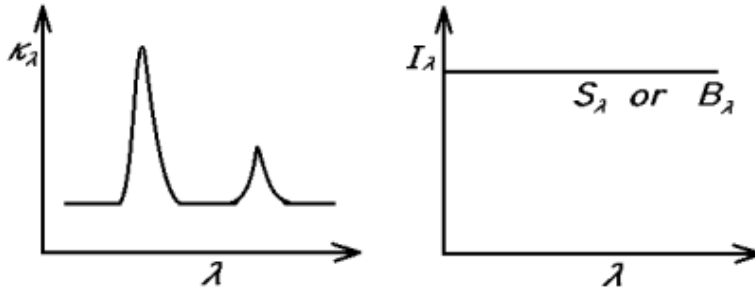


図 4.6 (左) κ_λ が波長依存していることを仮定。
(右) $\tau_\lambda \gg 1$ $I_{\lambda 0} = 0$ の場合の強度分布。強度は κ_λ に依存していない。

$I_\lambda = S_\lambda$ または、LTE においては $I_\lambda = B_\lambda$ 4.26

この場合、放射強度は κ_λ には依存していない。このような状況を図 4.6 に示す。

これは、もちろん、黒体の場合であり、 $\tau_\lambda \rightarrow \infty$ は入射光はすべて吸収されることを意味する。観測される放出放射強度は、ボックス内の放出のみによるものであり、観測される強度は源泉関数によって与えられるこの場合源泉関数はプランク関数である。

この最初のケース $\tau_\lambda \ll 1$ は多くの天文観測にとって重要である。今仮に、 1 cm^3 あたり数個の粒子から約 1 万粒子までの密度を持つ大きな星間ガス雲または星雲があるとするとする (図 4.7 参照)。

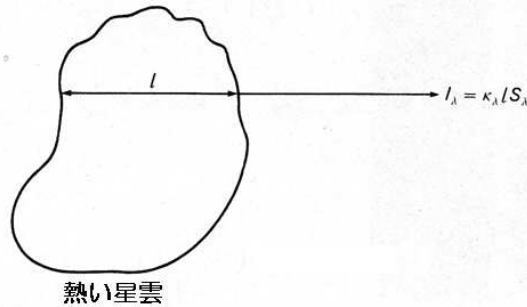


図 4.7 低密度の大きな星間星雲は輝線スペクトルを示す。それは視線方向に沿って光学的に薄いことを示している。

このような星雲は、通常輝線スペクトルを示しており、線中心ではなく少なくとも連続光と線の翼部では光学的に薄いことを示している (図 4.8 参照)。もし連続光と翼部で $\tau_\lambda \ll 1$ であり線中心で $\tau_\lambda \gg 1$ であるならば、翼部では $I_\lambda = \tau_\lambda S_\lambda \ll S_\lambda$ であっても、線中心では $I_\lambda = S_\lambda$ である。

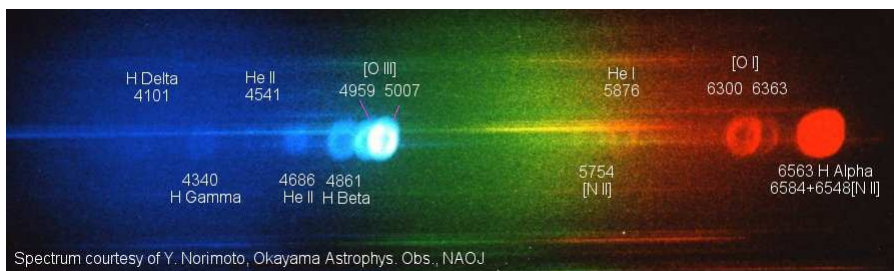


図 4.8 こと座のリング星雲 (惑星状星雲) のスリットレス分光

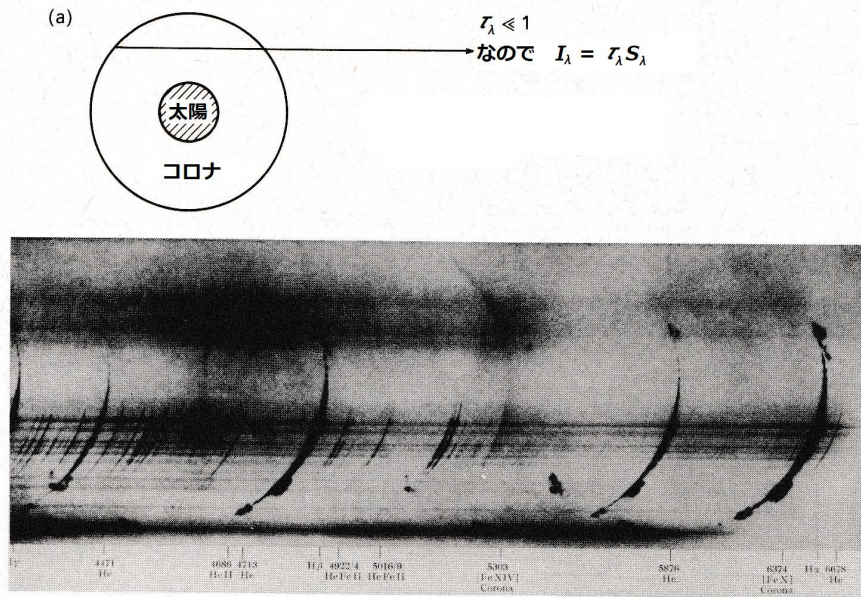


図 4.9 (a)太陽のコロナは光学的に薄いので、輝線スペクトルを示す。(b) 皆既日食の間は、光学的に薄いコロナは輝線スペクトルを示す。鉄の 13 個の電子を失った FeXIV の 5303 Å ラインのイメージが輝いている。その他のスペクトル線が彩層とコロナ-彩層間の遷移領域に見えている。このスペクトル画像は Davidson and Stratton 1927 による。

太陽コロナもまた $\tau_\lambda \ll 1$ のケースに対応して、日食中に観察できるように輝線スペクトルを示す (図 4.9 を参照)。これは、小さい光学的深さによるものである (高温によるものではなく、少なくとも太陽のリムを超えて観察した場合はそうではない)。

明らかに、星は光学的に非常に厚い $\tau_\lambda \rightarrow \infty$ ので、輝線スペクトルを示さない。しかし、黒体がそうであるように、すべての波長に対して一定の強度を示すものではない、なぜなら、我々が式 (4.26) を導出する際に想定したように源泉関数 S_λ は、経路の方向に沿って一定ではないからである。

次に、 $I_{\lambda 0} \neq 0$ のケースを議論する。

再び 2 つの場合を区別しよう : 光学的に薄い $\tau_\lambda \ll 1$ の場合と $\tau_\lambda \gg 1$ の場合の光学的に厚い場合である。

光学的に薄い場合、再び e^{τ_λ} を $1 - \tau_\lambda$ で置き換えることができる。式 (4.21) は次のようになる。

ここで、 $I_{\lambda 0} = 0$ の場合は再び前に論じたケースに帰着する。

$$I_\lambda = I_{\lambda 0}(1 - \tau_\lambda) + S_\lambda \tau_\lambda = I_{\lambda 0} + \tau_\lambda(S_\lambda - I_{\lambda 0}) \quad 4.27$$

$I_{\lambda 0} \neq 0$ の場合は、射出強度は、元の強度 $I_{\lambda 0}$ にひとつの項が加わる。その符号は、 $I_{\lambda 0}$ が S_λ よりも大きいかに小さいかに依存する。 $I_\lambda > S_\lambda$ の場合、(4.27) 式の最後の項が負になる。そするとこの式を書き換えて

$$I_\lambda = I_{\lambda 0} - \tau_\lambda(I_{\lambda 0} - S_\lambda) \quad 4.28$$

これは、元の強度から、光学的深さ τ_λ に比例する何かを減算するものが存在することを意味する。

したがって、 κ_λ が大きい波長、つまりスペクトル線の波長では、強度の損失がさらに大きくなる。この場合、強度 I_{λ_0} の背景光の上に吸収線が乗っていることになる（図 4.10 を参照）。このケースは明らかにキルヒホッフ・ブンゼンの実験の 2 番目のケースである。

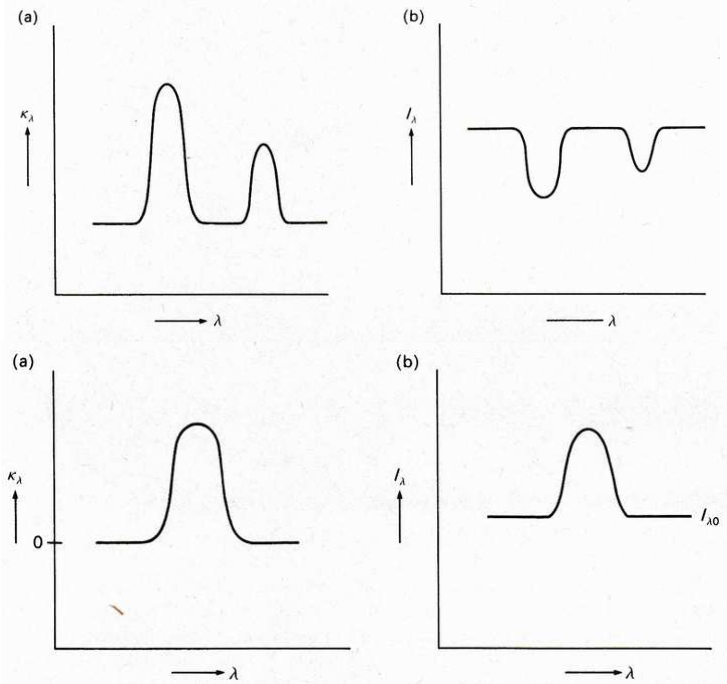


図 4.10

(a) κ_λ が波長依存していることを仮定

(b) K_λ が (a) で与えられ

$I_{\lambda_0} > S_\lambda$ である時、強度分布が波長の関数として示される。

図 4.11

(a) κ_λ が波長依存していることを仮定

(b) K_λ が (a) で与えられ

$I_{\lambda_0} < S_\lambda$ である時の強度分布 I_λ が波長の関数として示される。

$I_\lambda < S_\lambda$ の場合、小さい光学的深さについて再び見出す。

$$I_\lambda = I_{\lambda_0} + \tau_\lambda (S_\lambda - I_{\lambda_0}) \quad 4.29$$

最後の項は正になる。背景光の強度 I_{λ_0} の上に輝線を見出すだろう（図 4.11 を参照）。

$\tau_\lambda \gg 1$ については、式 (4.21) から I_{λ_0} が何であれ、 $I_\lambda = S_\lambda$ になる。元の強度 I_{λ_0} は、非常に大きな光学的深さを有する経路 S に沿って完全に吸収される。

星は、通常、吸収線スペクトルを示す。これらは、したがって、より深い層から来る強度 I_{λ_0} が、星の上部層において源泉関数 S_λ より大きいというケースに対応しなければならない。

LTE を仮定する。つまり、それは $S_\lambda = B_\lambda$ を意味する。この場合、源泉関数は温度の上昇とともに増加する。これで星を 2 つの領域に分割することができる。光学的に厚い深層と、大気の頂上の光学的に薄い反転層である。次に、反転層に入ってくる I_{λ_0} は、より深い層でのプランク関数 $B_{\lambda d}$

によって与えられ、そして反転層についての源泉関数 S は、最上層についてのプランク関数 $B_{\lambda t}$ によって与えられる。星が吸収線スペクトルを示すという事実は、より深い層のプランク関数が最上層のプランク関数よりも大きいこと、すなわち

$$B_{\lambda d} > B_{\lambda t} \quad 4.30$$

を示している。つまり、より深い層の温度は最上層よりも高い。

我々の議論はまた、もし温度が外向きに上昇しているような星があったとすれば、その星の上層を見れば、そこには輝線スペクトルが期待できることを示している。これは、例えば紫外線の波長で太陽を観察するとき実際に当てはまる。約 1700\AA よりも長い波長では、温度がまだ外向きに低下している光球のより深い層が依然として見られ、吸収線スペクトルが見られる (図 4.12 を参照)。 $\lambda < 1600\text{\AA}$ の場合、連続吸収係数は非常に高いために、温度が外側に向かって上昇する。そのため、源泉関数が外側に向かって増加している彩層からのみ光が得られる。したがって、これらの波長では輝線スペクトルが見られる。

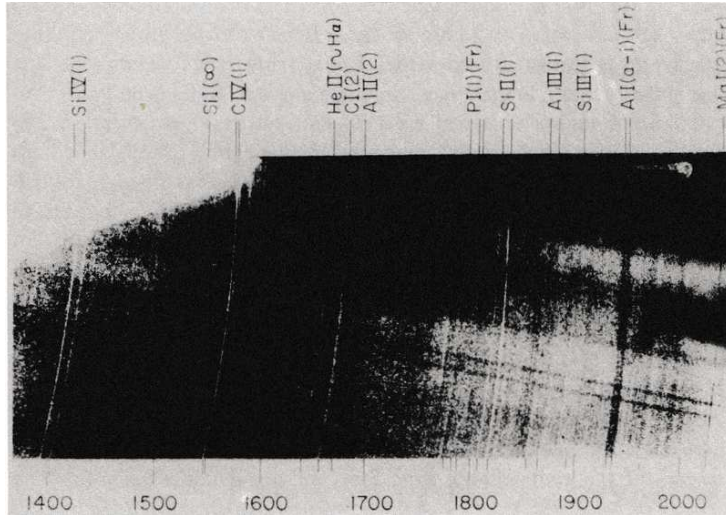


図 4.12 太陽スペクトルのエネルギー分布が波長域 $1400\text{\AA} < \lambda < 2000\text{\AA}$ に対して示されている。より長波長域では、連続光の吸収係数がまだ低いので、温度が外側に向かって低下している光球のより深い層が見えるので、吸収線スペクトルが見られる。 $\lambda < 1600\text{\AA}$ では連続吸収係数が相当大きくなる。これらの波長では、温度が外向きに上昇している彩層が見られ、輝線スペクトルが見える。(Zirin 1966. p.157 より)

結果をつぎのようにまとめることができる。

原理的には、輝線スペクトルの形成には 2 つの可能性がある。

1. 背景光のない空間内の光学的に薄いガスの塊、すなわち輝線星雲は輝線スペクトルを放出する。
2. 源泉関数が外側に向かって増大する光学的に厚いガス塊。紫外線での太陽スペクトルはその一例である。

吸収線スペクトルは、源泉関数が外側に向かって減少する光学的に厚いガス内で形成される。これは一般に温度が外側に向かって減少していることを意味する。(源泉関数がプランク関数と等しくない場合は、温度が外向きに上昇する一方で源泉関数が外向きに減少する。このような例外も心に留めておきたい。)

吸収線スペクトルは、また、源泉関数よりも大きい放射強度 $I_{\lambda 0}$ の背景放射により光学的に薄いガスが透過される場合にも形成される。星のまわりの薄い殻がその例かもしれないし、我々と星の間の星間物質であるかもしれない。